第 43 講　因数定理・剰余の定理

43　x の整式 $f(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りが $2x-3$，$(x-1)^2$ で割ったときの余りが $2x+1$ であるとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの余りが $f(\alpha)$ となることを示せ．

(2)　$f(x)$ を $x-1$，$x-2$，$x-3$ で割ったときの余りをそれぞれ求めよ．

(3)　$f(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ．

(4)　$f(x)$ を $(x-1)^2(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 43 講　因数定理・剰余の定理

43　x の整式 $f(x)$ を x^3+1 で割ったときの余りが x^2+x+3，x^3-1 で割ったときの余りが $2x+1$ であるとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ を x^2-x+1 で割ったときの余りを求めよ．

(2)　$f(x)$ を $(x-1)(x^2-x+1)$ で割ったときの余りを求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$x+1$　　㋑　$2x+2$　　㋒　$2x-1$

(2)　㋐　x^2-3x+2　　㋑　x^2+2x+3　　㋒　$-x^2+3x+1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 43 講　因数定理・剰余の定理

43　x の整式 $f(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りが $2x-3$，$(x-1)^2$ で割ったときの余りが $2x+1$ であるとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの余りが $f(\alpha)$ となることを示せ．

(2)　$f(x)$ を $x-1$，$x-2$，$x-3$ で割ったときの余りをそれぞれ求めよ．

(3)　$f(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ．

(4)　$f(x)$ を $(x-1)^2(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ．

【答】 (1) 略　(2) 順に 3，1，3　(3) $-2x+5$　(4) $-x^2+4x$

【解答】

(1)　$f(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの商を $Q(x)$ とする．$x-\alpha$ で割ったときの余りは定数であるので，このときの余りは r (定数) とおける．

このとき

$$f(x)=(x-\alpha)Q(x)+r$$

と表せるので，$x=\alpha$ を代入することで $r=f(\alpha)$ を得る．

(2)　剰余の定理より，$f(x)$ を $x-1$，$x-2$，$x-3$ で割ったときの余りはそれぞれ $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$ である．

$f(x)$ を $(x-2)(x-3)$，$(x-1)^2$ で割ったときの商をそれぞれ $Q_1(x)$，$Q_2(x)$ とすると

$$f(x)=(x-2)(x-3)Q_1(x)+2x-3 \quad \cdots\cdots①$$

$$f(x)=(x-1)^2Q_2(x)+2x+1 \quad \cdots\cdots②$$

②に $x=1$ を代入して $f(1)=\mathbf{3}$

①に $x=2$，3 を代入して $f(2)=\mathbf{1}$，$f(3)=\mathbf{3}$

(3)　$f(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q_3(x)$ とおく．$(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りは 1 次以下の式であるので，このときの余りは $ax+b$（a，b を定数とする）とおける．

このとき，$f(x)=(x-1)(x-2)Q_3(x)+ax+b$ と表せるので，$x=1$，2 を代入して $f(1)=a+b$，$f(2)=2a+b$ を得る．

これらと(2)の結果より $a+b=3$，$2a+b=1$ ゆえに $a=-2$，$b=5$

よって求める余りは $\boldsymbol{-2x+5}$

(4)　$f(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りが $2x+1$ より，定数 r と整式 $Q(x)$ を用いて

$$f(x)=(x-1)^2(x-3)Q(x)+r(x-1)^2+2x+1$$

と表せる．

$x=3$ を代入して $f(3)=4r+7$

(2)の結果より $f(3)=3$ であるので，$r=-1$

よって求める余りは $-1(x-1)^2+2x+1=\boldsymbol{-x^2+4x}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 43 講　因数定理・剰余の定理

43　x の整式 $f(x)$ を x^3+1 で割ったときの余りが x^2+x+3，x^3-1 で割ったときの余りが $2x+1$ であるとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ を x^2-x+1 で割ったときの余りを求めよ．

(2)　$f(x)$ を $(x-1)(x^2-x+1)$ で割ったときの余りを求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$x+1$　　㋑　$2x+2$　　㋒　$2x-1$

(2)　㋐　x^2-3x+2　　㋑　x^2+2x+3　　㋒　$-x^2+3x+1$

【答】 (1) ㋑　(2) ㋒

【解答】

(1)　$f(x)$ を x^3+1 で割ったときの商を $Q_1(x)$ とすると

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^3+1)Q_1(x)+x^2+x+3\\&=(x+1)(x^2-x+1)Q_1(x)+x^2-x+1+2x+2\\&=(x^2-x+1)\{(x+1)Q_1(x)+1\}+2x+2\end{aligned}$$

となるので，$f(x)$ を x^2-x+1 で割ったときの余りは $\boldsymbol{2x+2}$

(2)　(1)において $(x+1)Q_1(x)+1$ を $x-1$ で割ったときの商を $Q_2(x)$，余りを r（定数）とおくと

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2-x+1)\{(x-1)Q_2(x)+r\}+2x+2\\&=(x-1)(x^2-x+1)Q_2(x)+r(x^2-x+1)+2x+2\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

と表せる．

ここで，$f(x)$ を x^3-1 で割ったときの余りが $2x+1$ であるので，商を $Q_3(x)$ とおくと

$$f(x)=(x^3-1)Q_3(x)+2x+1$$

より $f(1)=3$ を得る．

①に $x=1$ を代入すると $f(1)=r+4$ となるので，$r=-1$ となる．

よって

$$f(x)=(x-1)(x^2-x+1)Q_2(x)-x^2+3x+1$$

となるので，求める余りは $\boldsymbol{-x^2+3x+1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。